Pour aller plus loin...

L'existence d'un plus petit élément pourrait être déduit directement (et donc le premier point de la démonstration p.12 ne serait pas traité) si l'on avait la propriété suivante, donnée dans le supérieur :

<u>Lemme d'Archimède</u> : $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}, nb > a$

Démonstration

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$b \in \mathbb{N}^*$ donc $b \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$ donc $a \geqslant 0$ et donc $b \geqslant 1 \Rightarrow ab \geqslant a$ (1)

$a + 1 > a$ et $b > 0$ donc $(a + 1)b > ab$ (2)

(1) et (2) donne : $(a + 1)b > a$, avec $a \in \mathbb{N}$ donc, par somme, $(a + 1) \in \mathbb{N}$.

En posant $n = a + 1$ on a bien,

pour tout entier naturel a et pour tout entier naturel non nul b, l'existence d'un entier naturel n tel que $nb > a$

Remarques

- Archimède énonce ce lemme (appelé aussi axiome d'Archimède) sous cette forme :
  « Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande. »
- Plus généralement on a le lemme d'Archimède si l'on se place dans $\mathbb{R}$: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, nb > a$.
- Le fait que cette propriété soit vraie dans $\mathbb{R}$ permet de dire que $\mathbb{R}$ est archimédien. Suivant la construction de $\mathbb{R}$ choisie ce lemme est une propriété qui découle de l'axiomatique de $\mathbb{R}$ ou est un axiome qui permet de définir $\mathbb{R}$.

Une autre démonstration de l'existence dans la division euclidienne, qui n'utilise pas l'axiome intervenant dans la construction de $\mathbb{N}$, s'obtient en utilisant la notion de partie entière mais l'existence de la partie entière se démontre avec le lemme d'Archimède et le fait que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément...démonstration proche de la démonstration p.12